## Лабораторная работа №1 – Множества и доказательства

**Цель работы:** Научиться работать с множествами, осуществлять операции над ними.

**Задание 1.** Пусть X — множество всех студентов университета. Пусть A — множество студентов первого года обучения, B — множество студентов второго года обучения, C — множество студентов, изучающих дискретную математику, D — множество студентов, специализирующихся в международных отношениях, E — множество студентов, побывавших на концерте в понедельник вечером, а F — множество студентов, которые во вторник занимались до двух часов дня. Используя обозначения теории множеств, опишите следующие множества студентов.

1. Все студенты второго года обучения, изучающие дискретную математику.  
   {x ∈ X: x ∈ B и x ∈ C}
2. Все студенты первого года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня.  
   {x ∈ X: x ∈ A и x ∈ F}
3. Все студенты, специализирующиеся в международных отношениях, которые в понедельник вечером побывали на концерте.  
   {x ∈ X: x ∈ D и x ∈ E}
4. Все студенты второго года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня и не специализируются в международных отношениях.  
   {x ∈ X: x ∈ B и x ∈ F и x ∉ D}
5. Все студенты первого и второго годов обучения, которые не ходили в понедельник вечером на концерт, но которые специализируются в международных отношениях.  
   {x ∈ X: (x ∈ A или x ∈ D) и x ∉ E и x ∈ D}
6. Все студенты, которые обучаются первый год и специализируются в международных отношениях, или которые во вторник занимались до двух часов дня.  
   {x ∈ X: (x ∈ A или x ∈ D) и x ∈ F}

**Задание 2.** Найдите, по крайней мере, два способа заменить многоточия в данных описаниях множеств. Пример решения: {2, 4, . . . , 12} можно записать как {2n: 1 ≤ n ≤ 6 и n ∈ ℕ} или {n + 1: n ∈ {1, 3, 5, 7, 9, 11}}.

1. {1, 3, ..., 31}, {2n − 1: 1 ≤ n ≤ 16 и n ∈ ℕ}, {2n − 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}}
2. {1, 2, ..., 26}, {n: 1 ≤ n ≤ 26 и n ∈ ℕ}, {n: n < 27 и n ∈ ℕ}
3. {2, 5, ..., 32}, {3n − 1: 1 ≤ n ≤ 11 и n ∈ ℕ}, {3n − 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}}

**Задание 3.** Приведите три описания элементов множества {2, 5, 8, 11, 14}

{3n − 1: 1 ≤ n ≤ 5 и n ∈ ℕ}

{3n − 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5}}

{3n + 2: 0 ≤ n ≤ 4 и n ∈ Z}

**Задание 4.** Сколько элементов содержит каждое из следующих множеств?

(a) A = ∅. Множество A содержит ноль элементов. Ответ: 0

(b) B = {∅}. Множество B содержит один элемент. Ответ: 1

(c) C = {{0, 1}, {1, 2}}. Множество C содержит два элемента. Ответ: 2

(d) D = {0, 1, 2, {0, 1}, {1, 2}, {0, 1, 2}, A}. Множество D содержит семь элементов. Ответ: 7

(e) E = {0, {{1, {3, 5}, {4, 5, 7}, 8 }} }. Множество E содержит два элемента. Ответ: 2

**Задание 5.** Какие из следующих пар множеств равны? Для каждой пары неравных множеств найдите элемент, который входит в одно множество, и не входит в другое.

1. {0, 1, 2} и {0, 0, 1, 2, 2, 1}. Множества равны, так как содержат одинаковые элементы
2. {0, 1, 3, {1, 2}} и {0, 1, 2, {2, 3}}. Множества не равны. {1, 2} ≠ {2, 3}
3. {{1, 3, 5}, {2, 4, 6}, {5, 5, 1, 3}} и {{3, 5, 1}, {6, 4, 4, 4, 2}, {2, 4, 4, 2, 6}}. Эти множества равны, так как содержат одинаковые элементы
4. {{5, 3, 5, 1, 5}, {2, 4, 6}, {5, 1, 3, 3}} и {{1, 3, 5, 1}, {6, 4, 2}, {6, 6, 4, 4, 6}}. Множества не равны, разные элементы: {4, 6, 2} и {4, 6}
5. ∅ и {x ∈ ℕ: x > 1 и x^2 = x}. Эти множества равны, так как оба являются пустыми множествами
6. ∅ и {∅}. Множества не равны, так как первое множество пустое, а второе не пустое множество с 1 элементом (в данном случае с пустым множеством)

**Задание 6.** В этой задаче речь идет о следующих множествах: A = {0, 2, 4, 6}, B = {1, 3, 5}, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, D = ∅, E = ℕ, F = {{0, 2, 4, 6}}.

1. Перечислите подмножества множества A. Всего 24 = 16 подмножеств. Ответ: {0}, {2}, {4}, {6}, {0, 2}, {0, 4}, {0, 6}, {2, 4}, {2, 6}, {4, 6}, {0, 2, 4}, {0, 2, 6}, {0, 4, 6}, {2, 4, 6}, {0, 2, 4, 6}, ∅.
2. Перечислите подмножества множества B. Ответ: {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}, ∅.
3. Перечислите подмножества множества C. Всего 28 = 256 подмножеств. В ответе приведена часть подмножеств. Ответ: {0}, {0, 1}, {0, 1, 2}, {0, 1, 2, 3}, {0, 1, 2, 3, 4}, {0, 1, 2, 3, 4, 5}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, ∅, …
4. Перечислите подмножества множества D. Всего 20 = 1. Ответ: ∅
5. Перечислите подмножества множества E. У множества натуральных чисел ℕ бесконечно много подмножеств. В ответе приведена часть подмножеств множества ℕ. Ответ: {1}, {2}, {1, 2}, {3}, {3, 4}, {100, 120, 990}, …
6. Перечислите подмножества множества F. Всего 21 = 2. Ответ: {{0, 2, 4, 6}}, ∅

**Задание 7.** Пусть A = {n: n ∈ ℕ и n = 2k + 1 для некоторого k ∈ ℕ}, B = {n: n ∈ ℕ и n = 4k + 1 для некоторого k ∈ ℕ} и С = {m ∈ ℕ: m = 2k – 1 и k ∈ ℕ и k ≥ 1}. Докажите следующие утверждения.

(a) 35 ∈ A. 35 = 2 \* 12 + 1, k=12, k ∈ ℕ, значит 35 ∈ A

(b) 35 ∈ C. 35 = 2 \* 13 – 1, k=13, k ∈ ℕ, значит 35 ∈ C

(c) 35 ∉ B. k = (35 – 1)/4, число k не натуральное, а значит 35 ∉ B

**Задание 8.** Пусть A = {n: n ∈ ℕ и n = 3k + 2 для некоторого k ∈ ℕ}, B = {n: n ∈ ℕ и n= 5k – 1 для некоторого k ∈ ℕ такого, что k ≥ 5} и C = {m ∈ ℕ: m = 6k – 4 и k ∈ ℕ и k > 1}. Докажите следующие утверждения.

(a) C ⊆ A. n = 6k – 4 = 3j + 2, тогда j = (6k – 6)/3 = 3k-3, j ∈ ℕ при k > 1, таким образом C ⊆ A.

(b) A ≠ B. 5 ∈ A и 5 ∉ B, значит A ≠ B

(c) B ≠ C. 8 ∈ B и 8 ∉ B, значит B ≠ C

(d) A ≠ C. 5 ∈ A и 5 ∉ C, значит A ≠ C

(e) C ⊂ A. Т.к 5 ∈ A и 5 ∉ C и C ⊆ A, значит C ⊂ A.

**Задание 9.** Расскажите, чем отличаются множества ∅ и {∅}

∅ – это пустое множество, пустым множеством называется множество без элементов, в данном случае мощность множества 0, то есть 20 = 1, у этого множества одно подмножество ∅.

{∅} – это не пустое множество, элементом этого множества является пустое множество. В данном случае мощность множества равна 1, исходя из этого

21 = 2, то есть у этого множества два подмножества: ∅ и {∅}.

## Лабораторная работа №2 – Подсчеты мощности множеств

**Цель работы:** Научиться подсчитывать мощность множеств, опираясь на основную теорему подсчёта мощности и принцип включения — исключения.

**Задание 1.** В группе из 35 студентов все биологи или блондины, и других нет. Биологов среди них 27, а блондинов 21. Сколько биологов – блондины? Решение:

Пусть A – множество биологов, а B – множество блондинов. Тогда количество студентов равно сумме количества биологов и блондинов, минус количество студентов, которые и биологи, и блондины:

35 = |A| + |B| – |A ∩ B|

Подставляем |A| = 27 и |B| = 21, получаем:

|A ∩ B| = 27 + 21 – 35 = 13

Ответ: число студентов, которые являются и биологами, и блондинами, равно 13.

**Задание 2.** В группе режиссуры 33 студента любят фильмы Хичкока, 21 студент любит фильмы Спилберга и 17 студентов любят фильмы обоих режиссеров. Сколько студентов в этой группе, если каждый из них попал в какую-нибудь категорию? Решение:

Пусть:

A – множество студентов, любящих фильмы Хичкока.

B – множество студентов, любящих фильмы Спилберга.

Тогда количество студентов в группе можно выразить как сумму количества студентов, любящих фильмы Хичкока, и количества студентов, любящих фильмы Спилберга, за вычетом тех, кто любит фильмы обоих режиссеров:

|A ∪ B| = |A| + |B| – |A ∩ B|

Подставляем известные данные:

|A| = 33

|B| = 21

|A ∩ B| = 17

|A ∪ B| = 33 + 21 – 17 = 37

Ответ: в группе 37 студентов.

**Задание 3.** В теннисном лагере 39 игроков. Из них 25 человек левши, 22 человека бьют с задней линии двумя руками, и других нет. Сколько левшей бьют с задней линии двумя руками? Решение:

Количество левшей, бьющих с задней линии двумя руками, равно числу левшей плюс число игроков, бьющих с задней линии двумя руками, минус общее число игроков:

|A ∩ B| = |A| + |B| – |U|

Где:

|A| = 25 (левшей)

|B| = 22 (бьющих с задней линии двумя руками)

|U| = 39 (всего игроков)

|A ∩ B| = 25 + 22 – 39 = 8

Ответ: 8 левшей бьют с задней позиции двумя руками

**Задание 4.** Руководству факультета иностранных языков нужно было узнать, сколько из 2000 студентов университета не изучают ни одного иностранного языка. Объединив данные по классам, выяснили, сколько студентов изучают французский, немецкий и испанский языки в том или ином сочетании. Эти данные отражены в следующей таблице:

|  |  |
| --- | --- |
| Языки | Число студентов |
| Французский | 75 |
| Немецкий | 68 |
| Испанский | 199 |
| Французский и немецкий | 32 |
| Французский и испанский | 41 |
| Немецкий и испанский | 11 |
| Французский, немецкий и испанский | 7 |

Решение:

Количество студентов, не изучающих ни одного иностранного языка, можно найти как разницу между общим числом студентов и числом студентов, изучающих хотя бы один иностранный язык.

Общее количество студентов: 2000

Обозначим множества:

F — французский, ∣F∣=75

N — немецкий, ∣N∣=68

I — испанский, ∣I∣=199

Также даны пересечения:

∣F ∩ N∣ = 32

∣F ∩ I∣ = 41

∣N ∩ I∣ = 11

∣F ∩ N ∩ I∣ = 7

Число студентов, изучающих хотя бы один иностранный язык, находим, используя принцип включения-исключения:

|F ∪ N ∪ I| = |F| + |N| + |I| − |F ∩ N| − |F ∩ I| − |N ∩ I| + |F ∩ N ∩ I|

Подставляем значения

|F ∪ N ∪ I| = 75 + 68 + 199 – 32 – 41 – 11 + 7 = 265

Теперь найдем количество студентов, не изучающих ни один иностранный язык:

2000 – 265 = 1735

Ответ: 1735

**Задание 5.** Сколько целых чисел от 500 и 10 000 делятся на 5 или на 7? Решение:

Пусть:

A – числа, кратные 5

B – числа, кратные 7

Ищем ∣A ∪ B∣ = ∣A∣ + ∣B∣ − ∣A ∩ B∣ (формула включения-исключения)

Найдем количество чисел, кратных 5 на отрезке [500, 10000]:

Найдем количество чисел, кратных 7 на отрезке [500, 10000]:

Числа кратные 35 (то есть и 5 и 7)

∣A ∪ B∣ = 1901 + 1375 – 271 = 2987

Ответ: 2987 чисел делятся на 5 или на 7 на отрезке [500, 10000]

**Задание 6a.** Сколько чисел от 1 до 70 000 000, включая эти два числа, делятся на 2, 5 или 7? Решение:

Обозначим:

A – множество чисел, кратных 2

B – множество чисел, кратных 5

C – множество чисел, кратных 7

По принципу включения-исключения:

∣A ∪ B ∪ C∣ = ∣A∣ + ∣B∣ + ∣C∣ − ∣A ∩ B∣ − ∣A ∩ C∣ − ∣B ∩ C∣ + ∣A ∩ B ∩ C∣

Найдем количество элементов в каждом множестве:

Найдем количество элементов в пересечениях:

Подставляем:

∣A ∪ B ∪ C∣ = 35 000 000 + 14 000 000 + 10 000 000 – 7 000 000 – 5 000 000 – 2 000 000 + 1 000 000 = 46 000 000

Ответ: 46 000 000 чисел делятся на 2, 5 или 7

**Задание 6б**. Сколько чисел от 1 до 6 000 000, включая оба эти числа, делятся на 4, 5 или 6? Решение:

Обозначим:

A – множество чисел, кратных 4

B – множество чисел, кратных 5

C – множество чисел, кратных 6

По принципу включения-исключения:

∣A ∪ B ∪ C∣ = ∣A∣ + ∣B∣ + ∣C∣ − ∣A ∩ B∣ − ∣A ∩ C∣ − ∣B ∩ C∣ + ∣A ∩ B ∩ C∣

Найдем количество элементов в каждом множестве:

Найдем количество элементов в пересечениях:

Подставляем:

∣A ∪ B ∪ C∣ = 1 500 000 + 1 200 000 + 1 000 000 – 300 000 – 500 000 – 200 000 + 100 000 = 2 800 000

Ответ: 2 800 000 чисел делятся на 4, 5 или 6

Задание 7. Выясните, сколько чисел от 1 до 21 000 000 000, включая оба этих числа, делятся на 2, 3, 5 или 7. Решение:

Обозначим:

A – множество чисел, кратных 2

B – множество чисел, кратных 3

C – множество чисел, кратных 5

D – множество чисел, кратных 7

Посчитаем количества чисел, делящихся на каждое из чисел: