## Лабораторная работа №1 – Множества и доказательства

Задание 1. Пусть X — множество всех студентов университета. Пусть A — множество студентов первого года обучения, B — множество студентов второго года обучения, C — множество студентов, изучающих дискретную математику, D — множество студентов, специализирующихся в международных отношениях, E — множество студентов, побывавших на концерте в понедельник вечером, а F — множество студентов, которые во вторник занимались до двух часов дня. Используя обозначения теории множеств, опишите следующие множества студентов.

1. Все студенты второго года обучения, изучающие дискретную математику.  
   {x ∈ X : x ∈ B и x ∈ C}
2. Все студенты первого года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня.  
   {x ∈ X : x ∈ A и x ∈ F}
3. Все студенты, специализирующиеся в международных отношениях, которые в понедельник вечером побывали на концерте.  
   {x ∈ X : x ∈ D и x ∈ E}
4. Все студенты второго года обучения, которые во вторник занимались до двух часов дня и не специализируются в международных отношениях.  
   {x ∈ X : x ∈ B и x ∈ F и x ∉ D}
5. Все студенты первого и второго годов обучения, которые не ходили в понедельник вечером на концерт, но которые специализируются в международных отношениях.  
   {x ∈ X : (x ∈ A или x ∈ D) и x ∉ E и x ∈ D}
6. Все студенты, которые обучаются первый год и специализируются в международных отношениях, или которые во вторник занимались до двух часов дня.  
   {x ∈ X : (x ∈ A или x ∈ D) и x ∈ F}

Задание 2. Найдите, по крайней мере, два способа заменить многоточия в данных описаниях множеств. Пример решения: {2, 4, . . . , 12} можно записать как {2n: 1 ≤ n ≤ 6 и n ∈ ℕ} или {n + 1: n ∈ {1, 3, 5, 7, 9, 11}}.

1. {1, 3, ..., 31}  
   {2n - 1: 1 ≤ n ≤ 16 и n ∈ ℕ}  
   {2n - 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}}
2. {1, 2, ..., 26}  
   {n: 1 ≤ n ≤ 26 и n ∈ ℕ}  
   {n: n < 27 и n ∈ ℕ}
3. {2, 5, ..., 32}  
   {3n - 1: 1 ≤ n ≤ 11 и n ∈ ℕ}  
   {3n - 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}}

Задание 3. Приведите три описания элементов множества {2, 5, 8, 11, 14}

{3n - 1: 1 ≤ n ≤ 5 и n ∈ ℕ}

{3n - 1: n ∈ {1, 2, 3, 4, 5}}

TODO: Добавить третье описание

Задание 4. Сколько элементов содержит каждое из следующих множеств?

1. A = ∅. Множество A содержит ноль элементов.
2. B = {∅}. Множество B содержит один элемент.
3. C = {{0, 1}, {1, 2}}. Множество C содержит два элемента.
4. D = {0, 1, 2, {0, 1}, {1, 2}, {0, 1, 2}, A}. Множество D содержит семь элементов.
5. E = {0, {{1, {3, 5}, {4, 5, 7}, 8 }} }. Множество E содержит два элемента.

Задание 5. Какие из следующих пар множеств равны? Для каждой пары неравных множеств найдите элемент, который входит в одно множество, и не входит в другое.

1. {0, 1, 2} и {0, 0, 1, 2, 2, 1}  
   Множества равны, так как содержат одинаковые элементы
2. {0, 1, 3, {1, 2}} и {0, 1, 2, {2, 3}}  
   Множества не равны.  
   В множестве A есть число 3, которого нет в множестве B  
   В множестве B есть число 2, которого нет в множестве A  
   {1,2} ≠ {2,3} → вложенные множества тоже разные
3. {{5, 3, 5, 1, 5}, {2, 4, 6}, {5, 1, 3, 3}} и {{1, 3, 5, 1}, {6, 4, 2}, {6, 6, 4, 4, 6}}  
   Эти множества равны, так как содержат одинаковые элементы
4. ∅ и {x ∈ ℕ: x > 1 и x2 = x}  
   Эти множества равны, так как оба являются пустыми множествами
5. ∅ и {∅}  
   Множества не равны, так как элемент ∅ принадлежит {∅} (в этом множестве 1 элемент - пустое множество), но не принадлежит ∅ (это пустое множество, в нем нет элементов)

Задание 6. В этой задаче речь идет о следующих множествах: A = {0, 2, 4, 6};  
B = {1, 3, 5}; C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; D = ∅; E = ℕ; F = {{0, 2, 4, 6}}

1. Перечислите подмножества множества A.  
   Всего 24 = 16 подмножеств  
   { 0 }, { 2 }, { 4 }, { 6 }, { 0, 2 }, { 0, 4 }, { 0, 6 }, { 2, 4 }, { 2, 6 }, { 4, 6 }, { 0, 2, 4 },  
   { 0, 2, 6}, { 0, 4, 6 }, { 2, 4, 6 }, { 0, 2, 4, 6}, ∅.
2. Перечислите подмножества множества B. Пример решения: подмножествами множества В будут { 1 }, { 3 }, { 5 }, { 1, 3 }, {1, 5 }, { 3, 5 },  
   { 1, 3, 5 }, ∅.
3. Перечислите подмножества множества C.  
   Всего 28 = 256 подмножеств. Ниже приведена часть подмножеств.  
   { 0 }, { 0, 1 }, { 0, 1, 2 }, { 0, 1, 2, 3 }, { 0, 1, 2, 3, 4 }, { 0, 1, 2, 3, 4, 5 },  
   { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, ∅, …
4. Перечислите подмножества множества D.  
   Всего 20 = 1 подмножество  
   ∅
5. Перечислите подмножества множества E.

У множества натуральных чисел ℕ бесконечно много подмножеств. Ниже приведена часть подмножеств множества ℕ.

{ 1 }, { 2 }, { 1, 2 }, { 3 }, { 3, 4 }, { 100, 120, 990 }, …

1. Перечислите подмножества множества F.  
   Всего 21 = 2 подмножества  
   {{0, 2, 4, 6}}  
   ∅

Задание 7. Пусть A = {n: n ∈ ℕ и n = 2k + 1 для некоторого k ∈ ℕ}, B = {n: n ∈ ℕ и n = 4k + 1 для некоторого k ∈ ℕ} и С = {m ∈ ℕ: m = 2k – 1 и k ∈ ℕ и k ≥ 1}. Докажите следующие утверждения.

1. 35 ∈ A  
   35 = 2k + 1; 2k = 34; k = 17, 17 ∈ ℕ. Число 35 принадлежит множеству A
2. 35 ∈ C  
   35 = 2k - 1; 2k = 36; k = 16, 16 ∉ ℕ. Число 35 принадлежит множеству C
3. 35 ∉ B  
   Число 35 не принадлежит множеству В, потому что для равенства  
   35 = 4k + 1 нельзя найти натуральное число k
4. A = C

Задание 9. Расскажите, чем отличаются множества ∅ и { ∅ }

∅ – это **пустое** множество, пустым множеством называется **множество без элементов**, в данном случае мощность множества 0, то есть 20 = 1, у этого множества одно подмножество ∅.

{ ∅ } – это **не пустое** множество, **элементом** этого множества **является пустое множество**. В данном случае мощность множества равна 1, исходя из этого  
21 = 2, то есть у этого множества два подмножества: ∅ и { ∅ }.

Задание 10. Пусть A, B и C — некоторые множества.

1. Докажите, что если A ⊂ B и B ⊆ C, то A ⊂ C.  
   Из A ⊂ B следует, что каждый элемент x ∈ A принадлежит B
2. Докажите, что если A ⊆ B и B ⊂ C, то A ⊂ C.

**Задания: Множества, шаблоны доказательств.**

1. Пусть A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, B = {2, 3, 6, 8} и C = {3, 5, 4, 8, 2}.
2. B ∪ C  
   B ∪ C = {2, 3, 4, 5, 6, 8}
3. B ⋂ C.  
   Пример решения: B ⋂ C = {2, 8}
4. B – C.  
   B – C = {6}
5. A – B.  
   A – B = {1, 4, 5, 7, 9, 10}
6. A – C.  
   A – C = {1, 6, 7, 9, 10}
7. Пусть U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 4} и C = {0, 3, 6, 9}.
8. A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4}  
   A ⋂ B = {0, 2}  
   A̅ = {4, 5, 6, 7, 8, 9}  
   (B ∪ C) – A = {0, 2, 4, 6, 9}
9. Пусть A = {0, 3}, В = {x, y, z}. Найдите выписанные множества:  
     
   (a) A × B = {(0,x), (0,y), (0,z), (3,x), (3,y), (3,z)}
10. A × A × B = {(0, 0, x), (0, 0, y), (0, 0, z), (0, 3, x), (0, 3, y), (0, 3, z), (3, 0, x), (3, 0, y), (3, 0, z), (3, 3, x), (3, 3, y), (3, 3, z)}
11. B × A = {(x, 0), (x, 3), (y, 0), (y, 3), (z, 0), (z, 3)}
12. B × A × B = {(x, 0, x), (x, 0, y), (x, 0, z), (x, 3, x), (x, 3, y), (x, 3, z), (y, 0, x), (y, 0, y), (y, 0, z), (y, 3, x), (y, 3, y), (y, 3, z), (z, 0, x), (z, 0, y), (z, 0, z), (z, 3, x), (z, 3, y), (z, 3, z)}
13. Пусть X = {2, 4}, Y = {1, 4} и Z = {0, 4, 8}. Постройте следующие множества:
14. X × Y
15. X × Y × Z
16. Y × Z
17. Z × Y × X
18. Z × X × Y